

DEVOIR SURVEILLÉ

1) On s'intéresse à l'équation différentielle $x \ln(x) y' + y = x$, notée \star , d'inconnue y de classe \mathcal{C}^1 .

- 1) Résoudre \star sur $]1, +\infty[$.
- 2) Montrer qu' \star possède une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^* .

- 2)
- 1) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme $X^4 + X^3 - n^4$ possède une et une seule racine x_n dans \mathbb{R}_+ .
 - 2) Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
 - 3) En exploitant la relation $x_n = n \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}}$, montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R})$, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ la limite de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ en $+\infty$ si elle existe et est finie. Parce qu'elle cache une limite, cette notation mérite d'être traitée comme telle tout au long du problème qui suit.

Partie A – Intégrale de Gauss

- 1) On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(t^2+1)}}{t^2+1} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b) Montrer l'existence de deux réels $\alpha_1 > 0$ et $M_1 \geq 0$ pour lequel pour tout $u \in [-\alpha_1, \alpha_1]$: $|e^u - 1 - u| \leq M_1 u^2$.
 - c) En déduire que pour tous $x \geq 0$ et tout $h \in \mathbb{R}$ assez petit : $\left| f(x+h) - f(x) + h \int_0^1 e^{-x(t^2+1)} dt \right| \leq 4M_1 h^2$.
 - d) En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et préciser une expression de sa dérivée.
- 2) On pose $g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 + f(x^2)$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que g est constante sur \mathbb{R}_+ , puis que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, dite *intégrale de Gauss*, est bien définie et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie B – Méthode de Laplace

La *méthode de Laplace* présentée dans cette partie donne un équivalent à l'infini de certaines suites d'intégrales.

- 3) Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^3([0, a], \mathbb{R})$. On suppose que f est à valeurs dans $[0, 1[$ sur $]0, a]$ et que $f(0) = 1, f'(0) = 0$ et $f''(0) = -p$ pour un certain $p > 0$.
 - a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $|e^u - 1| \leq e^{|u|} |u|$.
 - b) Montrer l'existence de deux réel $\alpha_2 > 0$ et $M_2 > 0$ pour lesquels pour tout $t \in [0, \alpha_2]$:

$$f(t) > 0 \quad \text{et} \quad \left| \ln f(t) + \frac{pt^2}{2} \right| \leq M_2 t^3.$$

On pose $b = \min \left\{ \alpha_2, \frac{p}{4M_2} \right\}$.

- c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, b]$: $\left| f(t)^n - e^{-\frac{np t^2}{2}} \right| \leq M_2 n t^3 e^{-\frac{np t^2}{4}}$ (le dénominateur vaut 4 dans le majorant exponentiel).
- d) Calculer $\int_0^b t^3 e^{-\frac{np t^2}{4}} dt$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \int_0^b f(t)^n dt - \int_0^b e^{-\frac{np t^2}{2}} dt \right| \leq \frac{8M_2}{np^2}$.
- e) Montrer que $\int_b^a f(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et en déduire que $\int_0^a f(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2np}}$.

- 4) Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^3([-a, 0], \mathbb{R})$. On suppose que f est à valeurs dans $[0, 1[$ sur $[-a, 0[$ et que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -p$ pour un certain $p > 0$. Montrer que $\int_{-a}^0 f(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2np}}$.
- 5) a) Calculer un équivalent de $\int_{-1}^0 ((1+t)e^{-t})^n dt$ et $\int_{-1}^a ((1+t)e^{-t})^n dt$ pour tout $a > 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- b) En déduire que $\int_0^1 (te^{-t})^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que pour tout $x > 1$: $\int_0^x (te^{-t})^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Partie C – Formule de Stirling

On redémontre dans cette partie la formule de Stirling.

- 6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^{+\infty} (te^{-t})^n dt = \frac{n!}{n^{n+1}}$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_2^{+\infty} (te^{-\frac{t}{2}})^n dt \leq \frac{2^{n+1} n!}{n^{n+1}}$, puis que $\int_0^2 (te^{-t})^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{n^{n+1}}$.
- c) En déduire la formule de Stirling.

Partie D – Exponentielles tronquées

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(nx)^k}{k!}$ et $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$. On calcule dans cette partie un équivalent de $T_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $x \in]0, 1]$.

- 7) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$: $R_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{n+1} e^{nx}}{n!} \int_0^x (te^{-t})^n dt$.
- b) En déduire un équivalent de $T_n(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- c) Montrer que pour tout $x > 0$: $e^x \geq ex$ et étudier le cas d'égalité.
- d) Calculer un équivalent de $T_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $x \in]0, 1[$.

4) Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous avez (parfaitement) fait tout le reste !

- 1) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x > 0$. Exprimer $\int_0^x F(t)^2 dt$ en fonction de $\int_0^x F(t)f(t) dt$ pour tout $x > 0$ après avoir justifié la bonne définition de ces intégrales, puis en déduire l'inégalité de Hardy :

$$\int_0^x F(t)^2 dt \leq 4 \int_0^x f(t)^2 dt.$$

- 2) Montrer que la constante 4 est optimale en étudiant la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}{\sqrt{x}}$.
